数理解析研究所講究録
第 688 巻 1989 年 14-24

相対エントロピーと指数

統数研　吉田　裕亮　(Hiroaki Yoshida)

M を可分な Hilbert 空間上の有限型 von Neumann 環でその忠実，正規，規格化されたトレースを τ とする．また，N を M の von Neumann 部分環とする．このとき Pimsner-Popa により M の N に関する相対エントロピー $H(M|N)$ が Connes-Stormer [CS] を元に導入された．以下にその定義をいくつかの記号を定めながら述べておくことにする．

E_N^M で M から N への τ-preserving な条件付き期待値を表すものとし M^+ 上の関数 $h_N^M(x)$ を以下のように定義する．

$$h_N^M(x) = \tau\eta E_N^M(x) - \tau\eta(x) \qquad \text{for } x \in M^+$$

ここで η は$\eta(t) = -t\log t$ $(t > 0)$, $\eta(0) = 0$ で定義される連続関数である．また $S(M)$ でもって M の単位の有限分割全体の集合を表すものとする．すなわち，

$$S(M) = \{\Delta = (x_i)_{i\in I}\ ;\ x_i \in M^+, \sum_{i\in I} x_i \le 1 \text{ ただし } I \text{ は有限集合}\}.$$

である．$S(M)$ の元 $\Delta = (x_i)_{i\in I}$ に対して $H_\Delta(M|N)$ を以下の式で定義する．

$$H_\Delta(M|N) = \sum_{i\in I} h_N^M(x_i)$$

このとき M の N に関する相対エントロピー $H(M|N)$ は

$$H(M|N) = \sup\{H_\Delta(M|N)\ ;\ \Delta \in S(M)\}$$

と定義される．

Pimsner-Popa は M が II_1 型因子環，N が M の部分因子環の場合ついて，相対エントロピー $H(M|N)$ の値を Jones の指数を用いて記述することに成功している [PP1]．さらに

[PP2], [PP3],[PO] 等では基本構成 (Basic Construction, fundamental construction) の反復により作られる環の列に付随して得られる相対交換子環と相対エントロピーとの関係等についても考察されている.

ここでは，一般の有限型 von Neumann 環 M とその部分環 N の場合に，どのようにして M が因子環の場合に還元されるされるかと言うこと，及び相対エントロピー $H(M|N)$ の計算に有用な公式について述べます. これらは奈良教育大学の　河上　哲　氏との共同研究の一部です.

まず，相対エントロピーに関して次の事柄がなりたつことが[KY1] わかる.

$Z(M)\cap Z(N)$ の射影子の族 $(p_i)_{i=1}^n$ (ただし $\sum_{i=1}^n p_i = 1$) に対して，

$$H(M|N) = \sum_{i=1}^{n} \tau(p_i) H(M_i|N_i),$$

である. ただし，M_i (resp. N_i) は射影子 p_i による M(resp. N) の被約 von Neumann 環であり $H(M_i|N_i)$ は M_i の被約トレース$\tau_i(\cdot) = \tau(\cdot)/\tau(p_i)$ に付随した相対エントロピー である.

まずは，このことの一般化を考えることにする. 簡単のために固定された M, N に対して $Z(M)\cap Z(N)$ を Z と表すことにする. このとき von Neumann 環の還元理論により M の可換な部分環 Z に対応する確率空間 (Γ, μ) 及びμ− 可測な von Neumann 環のフィールド$\gamma \to M(\gamma)$ と $\gamma \to N(\gamma)$ ，忠実，正規，規格化された $M(\gamma)$ のトレースのフィールド $\gamma \to \tau^\gamma$ が存在する. また，M から$\int_\Gamma^\oplus M(\gamma)d\mu(\gamma)$ への同型は N を$\int_\Gamma^\oplus N(\gamma)d\mu(\gamma)$ に写し，

$$\tau(x) = \int_\Gamma \tau^\gamma(x(\gamma))d\mu(\gamma) \qquad \text{for} \quad x = \int_\Gamma^\oplus x(\gamma)d\mu(\gamma) \in M.$$

となる. このとき μ-almost all $\gamma\in\Gamma$ で相対エントロピー $H(M(\gamma)|N(\gamma))$ はトレースτ^γ に付随して定義される.

定理 1. 関数$\gamma\in\Gamma \to H(M(\gamma)|N(\gamma)) \in [0,\infty]$ は μ-可測で

$$H(M|N) = \int_\Gamma H(M(\gamma)|N(\gamma))\, d\mu(\gamma).$$

である.

以下に証明の概要を述べることにする.

証明

まず, μ-可測な $M(\gamma)$ から $N(\gamma)$ へのτ-不変条件付き期待値のフィールド $\gamma \to E^\gamma$ が存在し

$$(1) \qquad E_N^M(x) = \int_\Gamma^\oplus E^\gamma(x(\gamma))\,d\mu(\gamma) \qquad \text{for} \quad x = \int_\Gamma^\oplus x(\gamma)\,d\mu(\gamma) \in M$$

を満たす. このとき次のことが従う.

$$(2) \qquad h_N^M(x) = \int_\Gamma h_{N(\gamma)}^{M(\gamma)}(x(\gamma))\,d\mu(\gamma) \qquad \text{for} \quad x = \int_\Gamma^\oplus x(\gamma)\,d\mu(\gamma) \in M$$

したがって, 任意の分割 $\Delta \in S(M)$ に対して$\gamma \to H_{\Delta(\gamma)}(M(\gamma)|N(\gamma))$ は μ- 可測で

$$(3) \qquad H_\Delta(M|N) = \int_\Delta H_{\Delta(\gamma)}(M(\gamma)|N(\gamma))\,d\mu(\gamma)$$

であると言える. ここで, 更に次のような記号を考える. すなわち, 任意の von Neumann 環の組 $M \supset N$ と任意の自然数 n に対して

$$S(M;n) = \{\Delta = (x_i)_{i\in I}^n \in \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ times}}\,;\, 0 \le x_i \le 1, \sum_{i=1}^n x_i \le 1\}$$

$$H_n(M|N) = \sup\{H_\Delta(M|N)\,;\, \Delta \in S(M;n)\}$$

とおく. ここで, $M \times \cdots \times M$ には M の作用素強位相の直積位相を考え, $S(M;n)$ にはその相対位相が与えられているものとする. $M^+ \ni x \to h_N^M(x)$ は強連続なので $S(M;n) \ni \Delta \to H_\Delta(M|N)$ も連続である. また, 次の事柄にも注意しておく. すなわち, $H_n(M|N) \le \log n$ で

$$(4) \qquad H_n(M|N) \le H_{n+1}(M|N) \quad \text{で} \quad H(M|N) = \lim_{n\to\infty} H_n(M|N)$$

である. $\gamma \to M(\gamma)$ の可測性により $\{y_k(\gamma)\,;\, k = 1, 2, \cdots\}$ が $M(\gamma)$ で強稠密であるような μ- 可測な M の作用素のフィールド$\gamma \to y_1(\gamma)$, $\gamma \to y_2(\gamma), \cdots$ が存在する. これらを用いて $S(M;n)$ の列 $\{\Delta_k\}_{k=1}^\infty$ とΓ の Borel 部分集合 Γ_n が$\mu(\Gamma\backslash\Gamma_n) = 0$ であり $\{\Delta_k\,;\, k = 1, 2, \cdots\}$

が $S(M;n)$ で稠密で，しかも $\{\Delta_k(\gamma)\,;\,k=1,2,\cdots\}$ が $S(M(\gamma);n)$ で稠密となるように取れる．したがって $\Delta \to H_\Delta(M|N)$ の連続性により

(5) $$H_n(M|N) = \sup\{H_{\Delta_k}(M|N)\ ;\ k=1,2,\cdots\},$$

(6) $$H_n(M(\gamma)|N(\gamma)) = \sup\{H_{\Delta_k(\gamma)}(M(\gamma)|N(\gamma))\ ;\ k=1,2,\cdots\}\ \ \text{for}\ \ \gamma\in\Gamma_n$$

を得る．

関数$\gamma \to H_{\Delta_k(\gamma)}(M(\gamma)|N(\gamma))$ は各 $k=1,2,\cdots$ について一様有界かつ可測であるので，関数$\Gamma_n \ni \gamma \to H_n(M(\gamma)|N(\gamma))$ は有界可測である．また (3) 式より

(7) $$H_n(M|N) \le \int_\Gamma H_n(M(\gamma)|N(\gamma))\,d\mu(\gamma).$$

であることがわかる．

次に逆の不等式を見る．任意の $\varepsilon>0$ を取り各 $k=1,2,\cdots$ に対して

$$B_k = \{\gamma\in\Gamma\ ;\ H_{\Delta_k(\gamma)}(M(\gamma)|N(\gamma)) \ge H_n(M(\gamma)|N(\gamma)) - \varepsilon\}$$

と置けば，B_k は Γ の可測集合であり (6) より$\bigcup_{k=1}^\infty B_k = \Gamma_n$ である．ここで互いに素な Γ の可測集合の族 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ を

$$E_1 = B_1,\ E_2 = (\Gamma_n\backslash E_1)\cap B_2,\cdots,E_k = (\Gamma_n\backslash\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i)\cap B_n,\cdots$$

と取る．また，Γ の可測集合 E_k に対応する Z の射影子を p_k で表わせば$\sum_{k=1}^\infty p_k = 1$ となる．そして

$$\Delta = \sum_{k=1}^\infty \Delta_k p_k$$

とおく．つまり，$\gamma\in E_k$ ならば$\Delta = (x_i)_{i=1}^n$, $\Delta_k = (x_{i,k})_{i=1}^n$, $x_i(\gamma) = x_{i,k}(\gamma)$ である．こうすれば $\Delta\in S(M;n)$ であり

(8) $$H_\Delta(M|N) \ge \int_\Gamma H_n(M(\gamma)|N(\gamma))\,d\mu(\gamma) - \varepsilon$$

となる．したがって

$$H_n(M|N) \geq \int_\Gamma H_n(M(\gamma)|N(\gamma))\,d\mu(\gamma) - \varepsilon \tag{9}$$

が任意の $\varepsilon > 0$ で成り立つ．よって

$$H_n(M|N) \geq \int_\Gamma H_n(M(\gamma)|N(\gamma))\,d\mu(\gamma) \tag{10}$$

である．ゆえに不等式 (7) より

$$H_n(M|N) = \int_\Gamma H_n(M(\gamma)|N(\gamma))\,d\mu(\gamma) \tag{11}$$

を得る．(4) と **Fatou** の補題 より $\gamma \to H(M(\gamma)|N(\gamma))$ は可測であり

$$H(M|N) = \int_\Gamma H(M(\gamma)|N(\gamma))\,d\mu(\gamma) \tag{12}$$

である．

[証明終]

ここで M が **可換** であり，$N = \mathbf{C}\cdot 1$ の場合（M の自明な部分環）について少し述べておくことにする．M が原子的であるとし，その原子達を $\{p_i\}_{i\in I}$ と表すものとする．このとき相対エントロピーの定義より

$$H(M|\mathbf{C}) = \sum_{i\in I} \eta\tau(p_i)$$

であることが従う．また，M が原子的でなければ p を完全非原子的な部分に対応する射影子とし，$\lambda = \tau(p)$ とすれば $\lambda > 0$ である．任意の自然数 n に対して $\tau(p_i) = \lambda/n$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\tau(p_{n+1}) = 1 - \lambda$ となる単位の分割 $\varDelta = (p_i)_{i=1}^{n+1}$ を取ることができる．このとき

$$H(M|\mathbf{C}) \geq H_\varDelta(M|\mathbf{C}) \geq \lambda \log n$$

となるが，n は任意だったので $H(M|\mathbf{C}) = \infty$ となる．したがって，$H(M|\mathbf{C}) < +\infty$ ならば M は原子的でなければならないと言える．

さて，一般の場合，定理 1 に現れる成分環 $M(\gamma)$ と $N(\gamma)$ は μ -almost all $\gamma \in \Gamma$ で $Z(M(\gamma)) \cap Z(N(\gamma)) = \mathbf{C} \cdot 1$ を満たしている．したがって相対エントロピー $H(M|N)$ を計算する場合には $Z(M) \cap Z(N) = \mathbf{C} \cdot 1$ であるような組 $M \supset N$ について行えばよいのだが，一般の場合では今のところ，やや不明な点もある．ここでは $Z(M) \cap Z(N) = \mathbf{C} \cdot 1$ よりも強い条件（以下の定理の条件 $(*)$ ）の下で考えることにより次のような結果が得られる．

定理 2. M を有限型の **von Neumann** 環で，その忠実，正規，規格化されたトレースを τ とする． N を M の **von Neumann** 部分環とする．更に，M から N への条件付き期待値 E が次の条件を満たすものとする．

$$(*) \qquad E(x) = \tau(x) \cdot 1 \qquad for\ x \in Z(M).$$

このとき，次のことを得る．

(i) もし $H(M|N) < +\infty$ ならば $Z(M)$ は原子的である．

(ii) $Z(M)$ が原子的であるとき，$Z(M)$ の原子達を $\{p_i\}_{i\in I}$ で表わし，$\sum_{i\in I} p_i N p_i$ を L とする．このとき $H(M|N) = H(M|L) + H(L|N)$ となり $H(M|L) = \sum_{i\in I} \tau(p_i) H(M_{p_i}|N_{p_i})$，$H(L|N) = \sum_{i\in I} \eta(\tau(p_i))$ である．

証明 (i). 条件 $(*)$ より $E(Z(M)) = \mathbf{C} \cdot 1$ であるので相対エントロピーの定義より $H(Z(M)|\mathbf{C}) \leq H(M|N)$ であることがわかる．ところで，仮定が $H(M|N) < +\infty$ であるので，先に述べたことより M の可換部分環 $Z(M)$ は原子的でなければならない．

(ii). M に関する条件より p_i $(i \in I)$ の濃度は高々可算である．したがって $I = \{1, 2, \cdots n\}$ または $I = \{1, 2, \cdots n, \cdots\}$ であると考えてよい．そこで $|I| = n$ のときは $r_i = p_i$ $(i \in I)$ とおき，$|I| = +\infty$ ならば $r_1 = p_1$，$r_2 = p_2, \cdots, r_{n-1} = p_{n-1}$，$r_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i$ とおく．

M の部分環 $\sum_{i=1}^{n} r_i M r_i$ を L_n とすれば [KY1,(ii) in Proposition 3.1, Remark 3.2] より

$$H(M|N) = H(M|L_n) + H(L_n|N), \tag{1}$$

$$H(M|L_n) = \sum_{i=1}^{n} \tau(r_i) H(M_{r_i}|N_{r_i}), \tag{2}$$

$$H(L_n|N) = \sum_{i=1}^{n} \eta\tau(r_i) \tag{3}$$

を得る．したがって $|I| = n$ ，つまり有限個の場合は良い．そこで $|I| = +\infty$ で $H(M|N) < +\infty$ としよう．$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ は M の von Neumann 部分環の増加列で$\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ の弱閉包は L になるので [PP1, Proposition 3.4] により

$$H(L|N) = \lim_{n\to\infty} H(L_n|N), \tag{4}$$

を得る．また (3),(4) 及び関数 η の連続性により

$$H(L|N) = \sum_{i\in I} \eta\tau(p_i). \tag{5}$$

を得る．一般に不等式

$$H(M|N) \le H(M|L) + H(L|N) \tag{6}$$

は成立する．これに (1) の等式を用いて

$$H(M|L) \le H(M|L_n) \le H(M|L) + H(L|N) - H(L_n|N) \tag{7}$$

を得る．よって (4) より

$$H(M|L) = \lim_{n\to\infty} H(M|L_n) \tag{8}$$

が従い (1),(4),(8) を合わせて

$$H(M|N) = H(M|L) + H(L|N) \tag{9}$$

が得られる．$H(M|L)$ に関する公式は定理 1 により導かれるので $H(M|N) < \infty$ の場合については良い．

ところで $H(M|N) = +\infty$ のときは，不等式 (6) より $H(M|L)$ あるいは $H(L|N)$ の少なくとも一方は無限でなければならない．したがって (9) 式は無限大も込めて成立している．また $H(M|L)$, $H(L|N)$ に関する公式は無限大のときにも成立している．

[証明終]

ここで定理 2 の (ii) は $Z(M)$ の$\sum_{i\in I} p_i = 1$ である射影子の族 $\{p_i\}_{i\in I}$ についても成り立つことに注意しておく．

条件 (*) についてであるが，一般に (*) から $Z(M) \cap Z(N) = \mathbf{C}\cdot 1$ は従うが，逆は必ずしも言えない．しかし以下のような場合には逆も言える．

(i) N が M の部分因子環である．

(ii) M が可換 von Neumann 環である．

(iii) N が M 上の局所コンパクト群の作用 α による不動点環 M^α である．[KY2, Section 2].

定理 2 に現れる各 p_i $(i \in I)$ は M の中心極小射影であるので被約 von Neumann 環 M_{p_i} は因子環である．したがって，以降相対エントロピー $H(M|N)$ の計算においては M は有限型因子環であり N はその部分環であると言う場合を考えれば良い．

定理 3. M を有限型の因子環で，そのカノニカルなトレースを τ とする．N を M の von Neumann 部分環とするとき，次のことを得る．

(i) もし $H(M|N) < +\infty$ ならば $N' \cap M$ は原子的である．特に，$Z(N)$ は原子的である．

(ii) $Z(N)$ が原子的であるとき，$Z(N)$ の原子達を $\{q_j\}_{j\in J}$ で表わし，$\sum_{j\in J} q_j M q_j$ を L とするとき $H(M|N) = H(M|L) + H(L|N)$ となり，$H(M|L) = \sum_{j\in J} \eta\tau(q_j)$, $H(L|N) = \sum_{j\in J} \tau(q_j) H(M_{q_j}|N_{q_j})$ である．

証明 (i). 今, $N'\cap M$ が非原子的であるとすれば, 非原子的な部分に対応する $N'\cap M$ の射影子 p を取ると $\lambda=\tau(p)>0$ となる. したがって, 任意の自然数 n に対して $N'\cap M$ の射影子の族 $(p_i)_{i=1}^{n+1}$ $(\sum_{i=1}^{n+1}p_i=1)$ が $\tau(p_i)=\lambda/n\ (i=1,2,\cdots,n)$, $\tau(p_{n+1})=1-\lambda$ を満たすように取れる. $\{p_1,p_2,\cdots,p_{n+1}\}'\cap M$ を B とすれば [PP1,Lemma 4.3] と $M\supset B\supset N$ であることを用いて

$$H(M|N)\geq H(M|B)=\sum_{i=1}^{n+1}\eta\tau(p_i)\geq\lambda\log n$$

を得る. ところで, n は任意であったので $H(M|N)=+\infty$ である.

(ii). これも先の定理 2 の (ii) のときと同じように $J=\{1,2,\cdots,n\}$ あるいは $J=\{1,2,\cdots n,\cdots\}$ であるとできる. そこで

$$r_j=q_j\quad(j=1,2,\cdots,n)\qquad\text{if}\quad |J|=n,$$

$$r_1=q_2,\cdots,r_{n-1}=q_{n-1},\ r_n=1-\sum_{j=1}^{n-1}q_j\quad\text{if}\quad |J|=+\infty$$

とおき $\sum_{j=1}^{n}r_jMr_j$ を L_n とする. このとき, [KY1,Proposition 3.1 (i)] より

$$H(M|N)=H(M|L_n)+H(L_n|N),\tag{1}$$

$$H(M|L_n)=\sum_{j=1}^{n}\eta\tau(r_j),\tag{2}$$

$$H(L_n|N)=\sum_{j=1}^{n}\tau(r_j)H(M_{r_j}|N_{r_j}).\tag{3}$$

を得る. したがって $|J|=n$ の場合は成立している. また [PP1, Lemma 4.3] 及び関数 η の連続性により

$$H(M|L)=\lim_{n\to\infty}H(M|L_n)=\sum_{j\in J}\eta\tau(q_j)\tag{4}$$

が従う. したがって先の定理 2 の (ii) とほぼ同様にして結果が得られる.

[証明終]

これらの定理より，M が有限型の因子環の場合に次のような系が導かれる．M が有限 I 型の場合は [PP1, Section 6] を適用すればよいので，ここでは M が II_1 型因子環の場合についての結果を揚げておく．

系 4. M を II_1 型の因子環，N を M の **von Neumann** 部分環とする．$N' \cap M$ を C とし C の極大可換部分環を A とする．また $L = C' \cap M$, $B = A' \cap M$ とおく．このとき $M \supset B \supset L \supset N$ となり，次のことを得る．

(i) $H(M|N) = H(M|B) + H(B|N)$.

(ii) $H(M|N) = H(M|L) + H(L|N)$.

(iii) C が原子的なとき $Z(C)$ の原子達を $\{f_\chi\}_{\chi\in X}$ とする．このとき，各 C_{f_χ} は I_{d_χ} 型因子環で $(d_\chi < \infty)$ あり，各 $L_{f_\chi} \supset N_{f_\chi}$ は **factor - subfactor** の組になり，以下の公式を得る．

$$(a) \qquad H(M|L) = \sum_{\chi\in X} \tau(f_\chi)\log(d_\chi^2/\tau(f_\chi)),$$

$$(b) \qquad H(L|N) = \sum_{\chi\in X} \eta\tau(f_\chi) + \sum_{\chi\in X} \tau(f_\chi)\log[L_{f_\chi} : N_{f_\chi}]$$

ただし [:] は *Jones* の指数である．

証明 (i). N が M の部分因子環であるとき，これは [PP1,Theorem 4.4] の証明において $H(M|B)$ と $H(B|N)$ をきっちりと計算することにより行っている．一般の部分環 N については，先の定理 **3** を用いることにより N が M の部分因子環である場合に帰着されることが分かる．

(iii). C は原子的であるので C_{f_χ} は I 型の因子環であり，$L' \cap M = C$ 及び $Z(C) = Z(L)$ であることが分かる．したがって，各 L_{f_χ} は因子環である．また M_{f_χ} と N_{f_χ} が共に因子環であることは明らかである．更に $(L_{f_\chi})' \cap M_{f_\chi} = (L' \cap M)_{f_\chi} = C_{f_\chi}$ は I_{d_χ} 型の因子環であるので $M_{f_\chi} \supset L_{f_\chi}$ は組として $L_{f_\chi} \otimes C_{f_\chi} \supset L_{f_\chi} \otimes \mathbf{C}$ と同型である．よって

$$(1) \qquad H(M_{f_\chi}|L_{f_\chi}) = \log d_\chi^2$$

を得る．また

$$(N_{f_\chi})' \cap L_{f_\chi} = (N' \cap L)_{f_\chi} = (C' \cap C)_{f_\chi} = Z(C)_{f_\chi} = \mathbf{C} \cdot 1$$

であるので [PP1, Corollary 4.6] によって

$$(2) \qquad H(L_{f_\chi} | N_{f_\chi}) = \log[L_{f_\chi} : N_{f_\chi}]$$

を得る．

式 (a) は定理 3 を $M \supset \sum_{\chi \in X} f_\chi M f_\chi \supset L$ に適用し (1) を使えば導かれる．次に式 (b) であるが，これは定理 2 を $L \supset \sum_{\chi \in X} f_\chi N f_\chi \supset N$ に適用し (2) を使う．ただし，この場合 $Z(N) \subset Z(L)$ であるので，定理 1 より N は因子環であると仮定できることに注意する必要がある．

(ii). $H(M|N) < +\infty$ のとき，定理 3 の (i) より C は原子的である．したがって，この系の (iii) をと [PP1,Theorem 4.4] を用いて結果を導くことができる．また，$H(M|N) = +\infty$ であるならば定理 2 の最後に述べたのと同じ論理で無限大も込めて成り立つことがわかる．

[証明終]

参考文献

[CS] A.Connes and E.Størmer, Entropy for automorphism of II_1 von Neumann algebras, Acta Math.,134 (1975),288–306.

[KY1] S.Kawakami and H.Yoshida, Actions of finite groups on finite von Neumann algebras and the relative entopy, J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 609–626.

[KY2] S.Kawakami and H.Yoshida, Reduction Theory on the relative entropy, Math. Japon., 33 (1988),975–990.

[PP1] M.Pimsner and S.Popa, Entropy and index for subfactors, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 19(1986), 57–106.

[PP2] M.Pimsner and S.Popa, Iterating the basic construction, Trans. AMS, 310 (1988), 127–134.

[PP3] M.Pimsner and S.Popa, Finite dimensional Approximation of Pairs of algebras and obstructions for the index, preprint.

[PO] S.Popa, Relative dimention, tower of projections and commuting squares of subfactors, Pac.J.Math., 137(1989),1–27.